Digitalno upravljanje

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Predavanje 5

Analiza diskretnih sistema

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu stabilnost diskretnog sistema
- Ispitaju stabilnost diskretnog sistema primjenom Jurijevog i Rausovog algebarskog kriterijuma
- Ispitaju stabilnost diskretnog sistema primjenom Nikvistovog kriterijuma
- Definišu konstante položaja diskretnog SAU-a
- Razumiju uticaj polova na dinamiku diskretnog sistema

Stabilnost diskretnih sistema

Podsjetimo se da postoje dvije definicije stabilnosti:

- Unutrašnja stabilnost → sva stanja konvergiraju ka nuli nakon što se sistem poremeti iz ravnoteže (poremećaji tipa početnih uslova)
- BIBO stabilnost → odziv na bilo koji ograničeni ulazni signal je takođe ograničen → impulsni odziv sistema je apsolutno integrabilan

S obizirom da smo već upoznati sa konceptom stabilnosti sistema i da smo na prethodnim predavanjima rekli da se lijeva poluravan s-ravni preslikava u jedinični krug u z-ravni, odmah ćemo dati uslove stabilnosti diskretnih sistema:

- Stabilan → svi polovi leže unutar jediničnog kruga
- Granično stabilan → konačan broj jednostrukih polova na jediničnom krugu, dok ostali polovi leže unutar jediničnog kruga (BIBO nestabilan)
- Nestabilan → bar jedan višestruki pol na jediničnom krugu ili bar jedan pol van jediničnog kruga

Stabilnost diskretnih sistema

Postoji više algebarskih kriterijuma za ispitivanje stabilnosti diskretnog sistema:

- Jurijev test stabilnosti
- Rausov test stabilnosti

Kod Jurijevog testa stabilnosti se polazi od karakteristične jednačine diskretnog sistema, na osnovu čega se formira Jurijeva tabela i zaključuje o stabilnosti sistema

Rausov kriterijum se ne može direktno primijeniti u z-domenu. Stoga se prvo vrši mapiranje z-ravni u w-ravan inverznom bilinearnom transformacijom. Ova ravan se zove w-ravan, jer nije ista kao s-ravan. Međutim, inverznom bilinearnom transformacijom unutrašnjost jediničnog kurga se preslikava u lijevu poluravan w-ravni (i obrnuto), što znači da se može primijeniti Rausov kriterijum za ispitivanje stabilnosti.

Pored Jurijevog i Rausovog kriterijuma, moguće je primijeniti i Nikvistov kriterijum za ispitivanje stabilnosti diskretnog sistema.

Jurijev test stabilnosti

Kod Jurijevog kriterijuma stabilnosti se polazi od opšteg oblika karakterističnog polinoma:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n\text{-}1} + \ldots + a_1 z + a_0, \; a_n > 0.$$

Jurijeva tabela se formira na sljedeći način:

	z^0	z^1	z^2	z^3	…	…	z^n
1	a_0	a_1	a_2	a_3	…	…	a_n
2	a_n	$a_{n\text{-}1}$	$a_{n\text{-}2}$	$a_{n\text{-}3}$	…	…	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	…	$b_{n\text{-}1}$	0
4	$b_{n\text{-}1}$	$b_{n\text{-}2}$	$b_{n\text{-}3}$	$b_{n\text{-}4}$	…	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	…	$c_{n\text{-}2}$	0	0
6	$c_{n\text{-}2}$	$c_{n\text{-}3}$	$c_{n\text{-}4}$	…	c_0	0	0
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
$2n$-3	q_0	q_1	q_2	0	0	0	0

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ a_n & a_{n-k-1} \end{vmatrix}, \; k = 0 \ldots n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{k+1} \\ b_{n-1} & b_{n-k-2} \end{vmatrix}, \; k = 0 \ldots n-2$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_0 & p_{k+1} \\ p_3 & a_{2-k} \end{vmatrix}, \; k = 0 \ldots 2$$

Jurijev test stabilnosti

Prema Jurijevom kriterijumu stabilnosti, sistem će biti stabilan ako su zadovoljeni sljedeći uslovi:

1. $|a_0| < |a_n|$

2. $f(z)|_{z=1} > 0$

3. $f(z)|_{z=-1} > 0$ za parno n,

   ili $f(z)|_{z=-1} < 0$ za neparno n

4. $|b_0| > |b_{n-1}|$

   $|c_0| > |c_{n-2}|$

   $|q_0| > |q_2|$

Uslov 4. se zanemaruje ako se radi o sistemu drugog reda

Jurijev test omogućava ispitivanje stabilnosti u zavisnosti od parametra K. Međutim, nekad za karakteristični polinom većeg reda ovaj metod zna da bude prilično komplikovan.

Rausov kriterijum

Rausov kriterijum se ne može primijeniti direktno na karakteristični polinom u z-domenu. Umjesto toga, karakteristični polinom se može preslikati u w-ravan, primjenom bilinearne transformacije:

$$z = \frac{w+1}{w-1}.$$

Nije bitna konstanta koja množi razlomak

Poznato je da se bilinearnom transformacijom oblast unutar jediničnog kruga preslikava u lijevu poluravan w-ravni i obrnuto (zvaćemo je w-ravan, jer nije ista kao i s-ravan). Dakle, ako se polovi sistema nalaze u lijevoj poluravni w-ravni, onda će se oni sigurno nalaziti unutar jediničnog kruga u z-ravni. Drugim riječima, kada preslikamo karakteristični polininom u w-ravan, moći ćemo primijeniti Rausov kriterijum stabilnosti:

$$f(w) = f(z)\Big|_{z=\frac{w+1}{w-1}}.$$

Ovim preslikavanjem ćemo zapravo dobiti racionalnu funkciju, pri čemu je za stabilnost bitno posmatrati samo brojilac te funkcije.

Nikvistov kriterijum

Nikvistov kriterijum se na diskretne sisteme može primijeniti na isti način kao i na kontinualne sisteme.

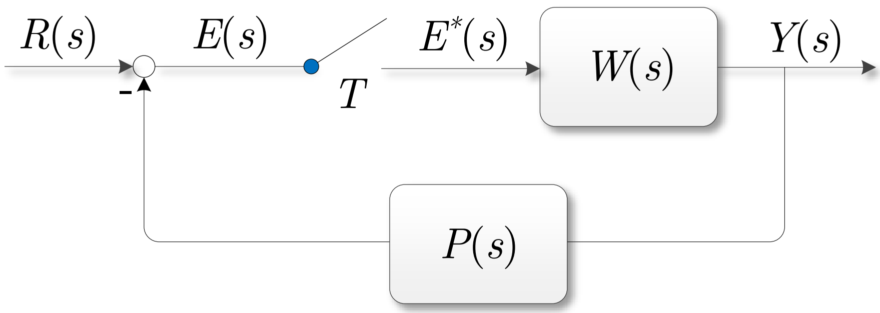
Funkcija prenosa spregnutog sistema je:

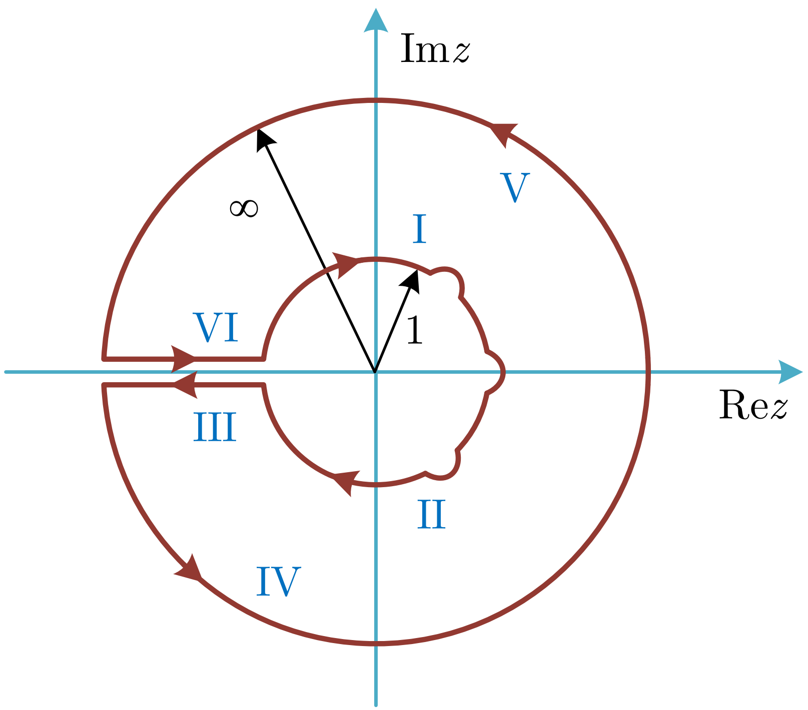
$$G(z) = \frac{W(z)}{1 + WH(z)},$$

dok je funkcija povratnog prenosa:

$$L(z) = WH(z).$$

Prilikom izvođenja se koristi Košijeva teorema, a kao Nikvistova kontura, po kojoj se obilazi funkcija povratnog prenosa $L(z)$, se usvaja zatvorena kontura u z-ravni koja obuhvata oblast van jediničnog kruga i zaobilizi singularitete.





Nikvistov kriterijum

Nikvistova kriva je zapravo frekvencijska karakteristika sistema, definisana na opsegu $[0,\ \omega_N]$.

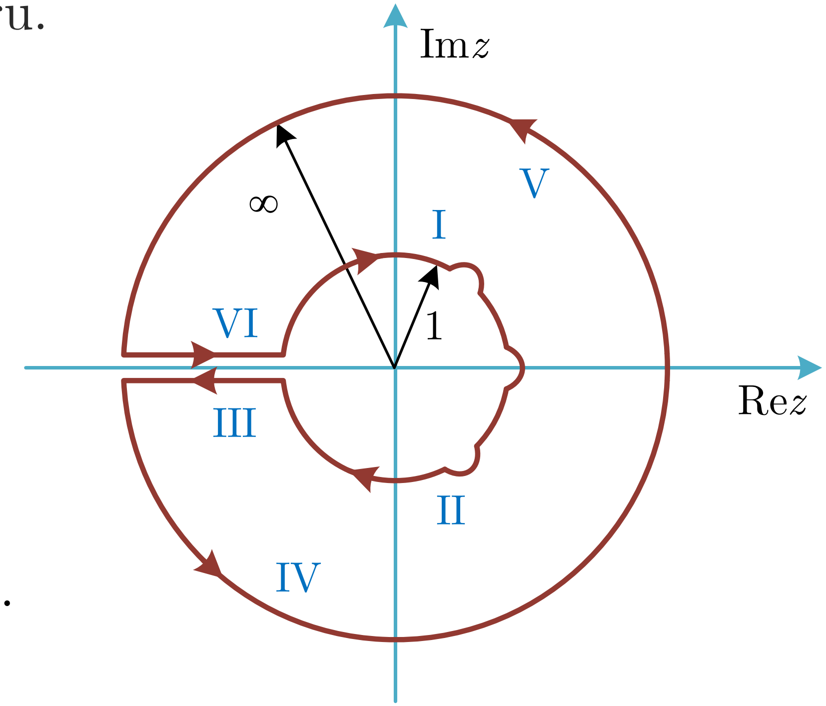
Nikvistov kriterijum stabilnosti

Neka je P broj nestabilnih polova sistema u z-ravni. Da bi spregnuti sistem bio stabilan Nikvistova kriva treba da obuhvati kritičnu tačku (-1, j0) za ugao $+P\pi$ u pozitivnom smjeru.

Ako funkcija prenosa ima astatizam (z=1), tada Nikvistovu krivu treba dopuniti tačkama koje pripadaju luku:

$$z = 1 + re^{j\theta},\ \ r \to 0, \theta \in \left(0, \pi / 2\right).$$

Kao i u kontinualnom slučaju, ovo se svodi na zatvaranje Nikivstove krive lukom koji ide u negativnom smjeru i koji počinje u tački: $\lim\limits_{z\to 1} W(z)$ ($+\infty$ ili $-\infty$).



Margine stabilnosti

Amplitudska i fazna margina diskretnog SAU-a se definišu analogno kontinualnom SAU-u. Amplitudska margina nam govori koliko pojačanje smijemo unijeti u direktnu granu prije nego što sistem postane nestabilan. Neka je ω_π najmanja frekvencija koja zadovoljava uslov:

$$\arg\left\{W_{j\omega_\pi}\right\} = -\pi.$$

Amplitudska margina ili margina pojačanja je jednaka:

$$a_m = \frac{1}{\left|L\left(j\omega_\pi\right)\right|}.$$

Sa druge strane, presječna učestanost preteka faze je najmanja frekvencija koja zadovoljava uslov:

$$\left|W_{j\omega_\gamma}\right| = 1.$$

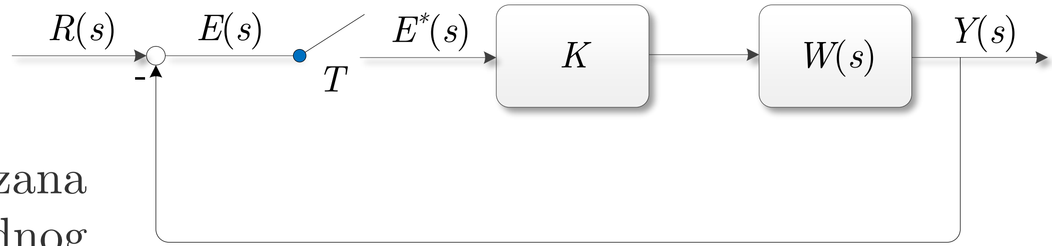
Margina faze nam govori koliko fazno kašnjenje smije da se pojavi u upravljačkoj petlji prije nego što sistem postane nestabilan:

$$\gamma_m = \pi + \arg\left\{W_{j\omega_\gamma}\right\}.$$

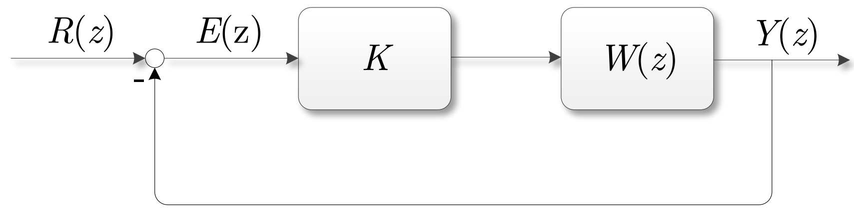
Primjer – stabilnost sistema

U zavisnosti od parametra K ispitati stabilnost sistema čiji je blok dijagram prikazan na slici ispod. Funkcija prenosa objekta upravljanja je:

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



Na donjoj slici desno je prikazana ekvivalentna šema hibridnog sistema u diskretnom domenu. ZOH ekvivalent sistema je:



$$W(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.368z + 0.3679}.$$

Karakteristični polinom je jednak:

$$f(z) = KB(z) + A(z),$$

gdje su $B(z)$ i $A(z)$ brojilac i imenilac funkije $W(z)$. Odnosno:

```
>> s=tf('s'), syms K
>> W=1/s/(s+1)
>> Wd=c2d(W,1,'zoh')
>> [B A]=tfdata(Wd) % koef. fje W
>> f=K*poly2sym(B{:})+poly2sym(A{:})
>> f=vpa(collect(f),3)
% zaokruzivanje na 3 decimale
```

$$f(z) = z^2 + (0.368K - 1.37)z + 0.264K + 0.368.$$

Primjer – stabilnost sistema

Jurijeva tabela je data ispod. Pošto se radi o sistemu drugog reda, Jurijeva tabela ima samo jednu vrstu.

	z^0	z^1	z^2
1	$0.264K+0.368$	$0.368K$-1.37	1

Prema Jurijevom kriterijumu, da bi sistem bio stabilan moraju biti ispunjeni sljedeći uslovi:

1. $|0.264K - 0.368| < 1 \quad \rightarrow \quad 0.264K + 0.368 < 1 \ \vee \ -0.264K - 0.368 < 1$

   $$K < 2.3939 \quad \vee \quad K > -5.18$$

2. $f(1) > 0 \quad \rightarrow \quad 0.632K > 0 \ \rightarrow \ K>0$

3. $f(-1) > 0 \quad \rightarrow \quad 2.74 - 0.104K > 0 \ \rightarrow \ K < 26.3462$

Presjecanjem uslova 1, 2 i 3, dobija se da je sistem stabilan za:

$$K \in (0, 2.3939).$$

```
>> vpa(subs(f,1),3)
ans =
0.632*K - 1.46e-11
>> vpa(subs(f,-1),3)
ans =
2.74 - 0.104*K
```

Primjer – stabilnost sistema

Stabilnost možemo ispitati pomoću Rausovog kriterijuma. Najprije karakteristični polinom treba preslikati u w-ravan koristeći bilinearnu transformaciju:

$$z = \frac{w+1}{w-1}.$$

Karakteristični polinom u w-ravni je jednak (uzima se samo brojilac):

$$f(w) = 6.321Kw^2 - (5.285K - 12.64)w + 27.36 - 1.036K$$

Rausova tabela

	1	**2**
w^2	$6.321K$	$27.36\text{-}1.036K$
w^1	$\text{-}5.285K{+}12.64$	0
w^0	$27.36\text{-}1.036K$	

```
>> syms w
>> subs(f,(w+1)/(w-1))
```

$$6.321K > 0 \quad \rightarrow \quad K > 0$$
$$-5.285K + 12.64 > 0 \quad \rightarrow \quad K < 2.3917$$
$$27.36 - 1.036K > 0 \quad \rightarrow \quad K < 26.40$$

Presjecanjem gornjih uslova dobija se da je sistem stabilan za:

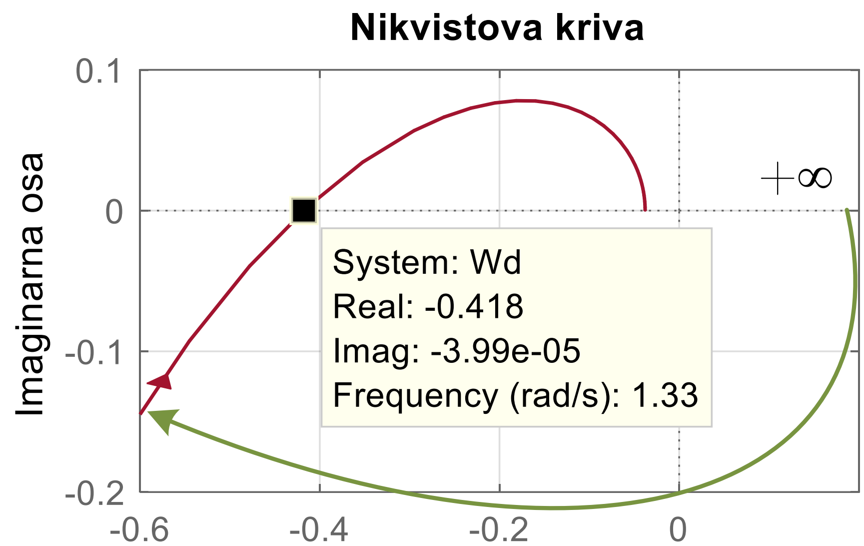
$$K \in (0, 2.3939).$$

Primjer – stabilnost sistema

Stabilnost sistema se može ispitati i pomoću Nikvistovog kriterijuma. Nikvistova kriva je prikazana na slici ispod.

Polovi sistema su 1 i 0.3679. S obzriom da sistem ima astatizam, krivu treba dopunuti. Kriva se dopunja lukom koji ide u negativnom smjeru i koji počinje u tački $+\infty$, jer je:

$$\lim_{z\to 1} W(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{(z-1)(z-0.3679)} = +\infty.$$



Diskretni sistem nema nestabilnih polova, što znači da kritična tačka ne smije da bude obuhvaćena:

$$-\frac{1}{K} < -0.418 \;\rightarrow\; K < \frac{1}{0.418} = 2.3923.$$

Primjer – stabilnost sistema

Na slici ispod su prikazani step odzivi sistema za K=1, K=2.3923, i za K=4.

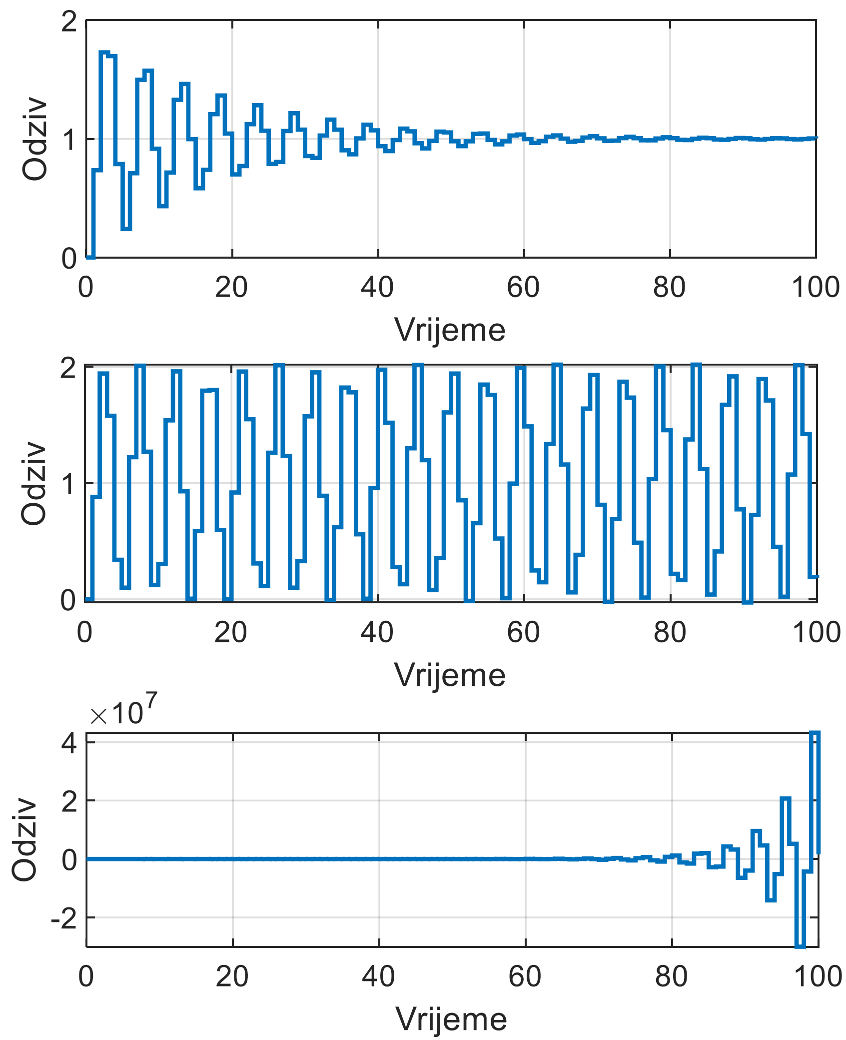
Za K=1, polovi sistema su 0.5 ± 0.6182i, odnosno, njihov moduo je 0.7951, što znači da je sistem stabilan.

Za K=2.3923, polovi sistema su 0.2439 ± 0.9698i, odnosno, njihov moduo je 1, što znači da je sistem na granici stabilnosti.

Za K=4, polovi sistema su -0.0518 ± 1.1925i, odnosno, njihov moduo je 1.1937, što znači da je sistem stabilan.

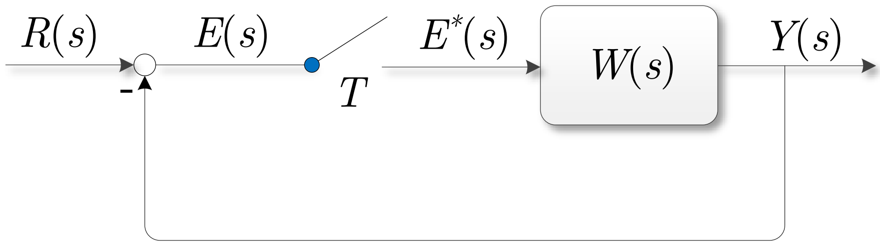
Sa slika desno se može vidjeti da u prvom slučaju step odziv konvergira ka jedinici (astatizam u otvorenoj sprezi), u drugoj slučaju step odziv osciluje, dok u trećem slučaju step odziv divergira.

```
>> pole(feedback(4*Wd,1))
```



Analiza stacionarnog stanja

Posmatrajmo pojednostavljenu regulacionu konturu hibridnog sistema.



Odabrani signal greške je jednak:

$$E^{*}(s) = R^{*}(s) - \left(W(s)\right)^{*} E^{*}(s).$$

Nakon preslikavanja u z-domen, Z tranformacija odbiraka signala greške biće jednaka:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + W(z)}.$$

Vrijednost signala greške u stacionarnom stanju za različite testne signale zavisi od tipa funkcije prenosa $W(z)$.

Analiza stacionarnog stanja

Ako je referentni signal step funkcija, tada će signal greške u stacionarnom stanju biti jednak:

$$e(\infty) = \lim_{z \to 1}\left(1 - z^{-1}\right)\frac{R(z)}{1 + WH(z)} = \lim_{z \to 1}\left(1 - z^{-1}\right)\frac{\frac{A}{1 - z^{-1}}}{1 + W(z)} = \frac{A}{1 + \lim_{z \to 1} W(z)}.$$

Slično kao kod kontinualnih sistema, granična vrijednost

$$K_p = \lim_{z \to 1} W(z)$$

se zove konstanta položaja i njome je definisana greška sistema u slučaju kada je referentni signal step funkcija.

Vrijednost konstante položaja, a samim tim i greške, zavisi od tipa funkcije povratnog prenosa. Ako sistem nema astatizam, tada je ova konstanta konačna, te će uvijek postojati neka konačna greška u radu SAU-a. Sa druge strane, ako sistem ima astatizam prvog ili većeg reda, tada će konstanta položaja biti beskonačna, a greška jednaka nuli.

Analiza stacionarnog stanja

Napomenimo da je astatizam u z-ravni pol koji je jednak 1, pa je tada:

$$K_p = \lim_{z \to 1} W(z) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-1)} \text{ostatak}(z) = \infty.$$

Analogno kontinualnom SAU, greške u praćenju rampa funkcije i parabolične funkcije su definisane na sljedeći način:

$$e(\infty) = \frac{A}{K_v} \quad \text{i} \quad e(\infty) = \frac{A}{K_a},$$

$$\boxed{\lim_{z \to 1}(z-1)F(z) = \lim_{z \to 1}(1-z^{-1})F(z)}$$

gdje su K_v i K_a konstante brzine i ubrzanja:

$$K_v = \lim_{z \to 1}(z-1)W(z) \quad \text{i} \quad K_a = \lim_{z \to 1}(z-1)^2 W(z).$$

Za digitalne sisteme važe isti zaključci kao i za kontinualne sisteme. Konstanta brzine ima vrijednost 0 za statičke sisteme, što znači SAU ne može da prati referentnu komandu u vidu rampe. Greška u praćenju rampe će biti konačna ako sistem ima astaziam prvog reda, odnosno 0 za sisteme za astatizmom drugog ili većeg reda. Na sličan način se donose zaključci za parabolični referentni signal.

Analiza stacionarnog stanja

Na kraju treba napomenuti da $W(z)$ predstavlja ZOH ekvivalent kontinualne funkcije povratnog prenosa:

$$W(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{1-e^{sT}}{s} W(s)\right) = (z-1)\,\mathcal{Z}\left(\frac{W(s)}{s}\right),$$

gdje je $\mathcal{Z}(W(s)/s)$ skraćeni zapis za Z transformaciju odbiraka impulsnog odziva čija je Laplasova transformacija jednaka $H(s)\,W(s)/s$. Polovi ove dvije funkcije prenosa su vezani preslikavanjem $z = e^{sT}$. Odnosno, ako sistem u otvorenoj sprezi ima astatizam, tada će i diskretni evkvivalent imati astatizam, jer je $e^{s0} = 1$. Ako sistem nema astatizam, tada se diskretni kontroler $C(z)$ može dizajnirati tako da ga sadrži.

Ako $C(z)$ dizajniramo tako što diskretizujemo analogni kontroler $C(s)$, može se pokazati da svaki obrađeni diskretizacioni postupak zadržava astatizam u diskretnom domenu. Odnosno $C(z)$ će imati pol u tački 1, ukoliko $C(s)$ ima pol u tački 0.

Analiza tranzijenta

Performanse kontinualnih sistema upravljanja zavise od položaja polova i nula sistema u s-ravni. Prije svega, kontinualni sistem je stabilan ukoliko se svi njegovi polovi nalaze u lijevoj poluravni s-ravni. Dalje, karakteristike prelaznog procesa (vrijeme smirenja, vrijeme uspona, preskok) zavise od položaja polova i nula u lijevoj poluravni s-ravni.

Slično, i kod diskretnih sistema je potrebno napraviti vezu između položaja polova u nula sistema u z-ravni sa njegovom stabilnošću i karakteristikama prelaznog procesa. Uticaj polova na prelazni proces možemo analizirati uzimajući u obzir vezu između polova diskretnog i kontinualnog sistema (z=e^{sT}) i imajući u vidu kako položaj polova u s-ravni utiče na performanse sistema.

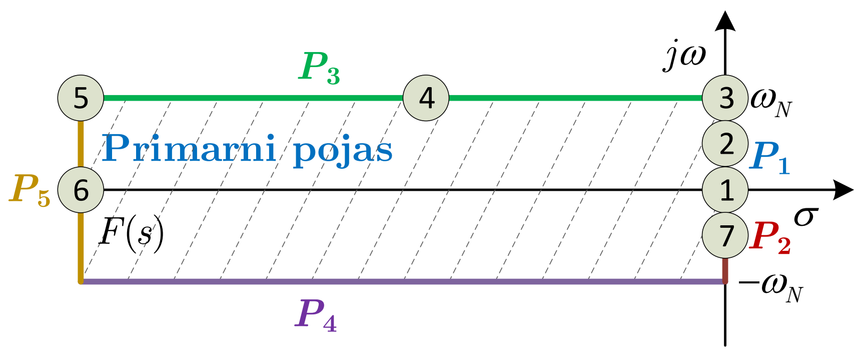
Kako je Laplasova transformacija diskretnog sistema periodična funkcija:

$$F^*(s + jn\Omega_s) = F^*(s).$$

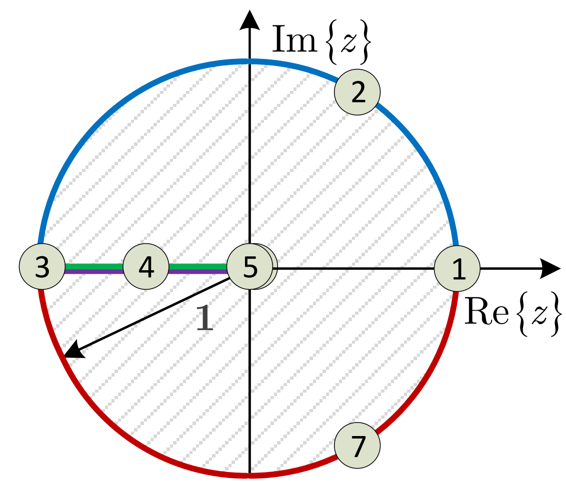
dovoljno je posmatrati samo njen primarni pojas, jer će se komplamentarni pojasevi u z-ravan preslikati na isti način.

Preslikavanje iz s ravni u z ravan

Primarni pojas Laplasove transformacije je prikazan na slici lijevo, dok je na slici desno prikazana oblast u z-ravni u koju su preslikava primarni pojas i njegova unutrašnjost. Imaginarna osa s-ravni se preslikava u jedinični krug. To znači da će odziv diskretnog sistema biti oscilatoran ukoliko njegovi polovi imaju jedinični moduo. Specijalno, ukoliko sistem ima pol u tački 1 (astatizam), tada će odziv biti aperiodičan. Polovi koji imaju ralni dio jednak -∞, se u z-ravni preslikavaju u kooridinatni početek (z=0). Svi polovi čiji je imaginarni dio jednak ω_N se preslikavaju na negativni dio realne z-ose.



$$s = -j\omega \mid \omega \in [-\omega_N, -\omega_N] \rightarrow z = e^{j\omega T}$$



Prava istog vremena smirenja

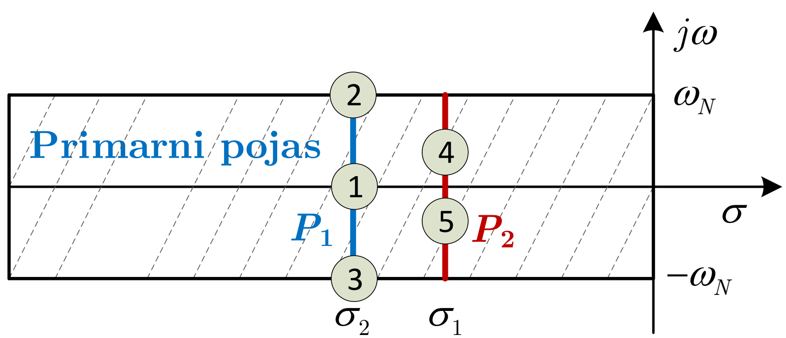
Kao što je poznato, kontinualni sistemi drugog reda čiji polovi imaju jednak realni dio imaju približno isto vrijeme smirenja. Vrijeme smirenja kod kontinulanih sistema drugog reda je jednako:

$$T_s \approx \frac{4}{\sigma},$$

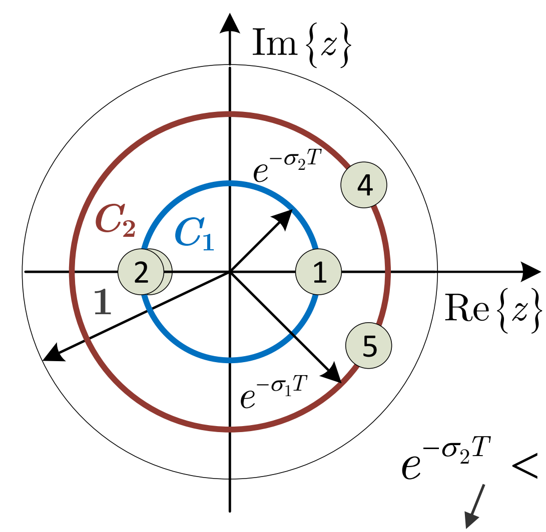
$$\boxed{\begin{aligned} s &= -\sigma + j\omega \\ z &= e^{sT} = re^{j\theta} \end{aligned}}$$

dok kod diskretnih sistema ona iznosi:

$$T_s \approx -\frac{4}{\ln|r|} \times T.$$



$$s = -\sigma_1 + j\omega \mid \omega \in [-\omega_N, -\omega_N] \rightarrow z = e^{-\sigma_1 T} e^{j\omega T}$$



$$e^{-\sigma_2 T} < e^{-\sigma_1 T}$$

Sistemi čiji polovi imaju isti moduo u z-domenu imaće isto vrijeme smirenja!

Sistemi čiji polovi leže na kružnici C_1 imaju kraće vrijeme smirenja!

Prava iste periode prigušenih oscilacija

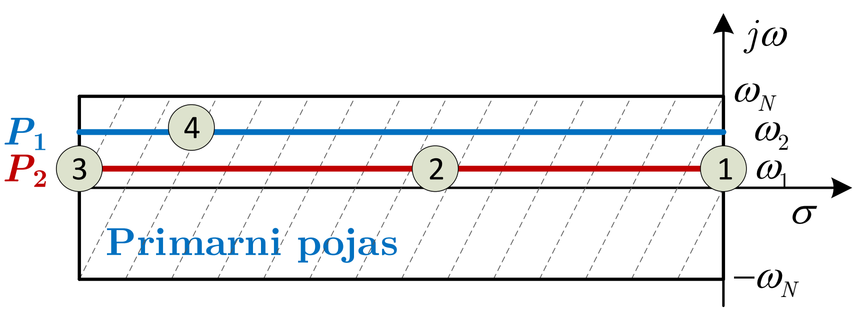
Kontinualni sistemi drugog reda čiji polovi imaju jednak imaginarni dio imaju istu periodu prigušenih oscilacija. Perioda prugušenih oscilacija kod kontinualnih sistema drugog reda je jednaka:

$$T_\pi = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\boxed{\begin{aligned} s &= -\sigma + j\omega \\ z &= e^{sT} = re^{j\theta} \end{aligned}}$$

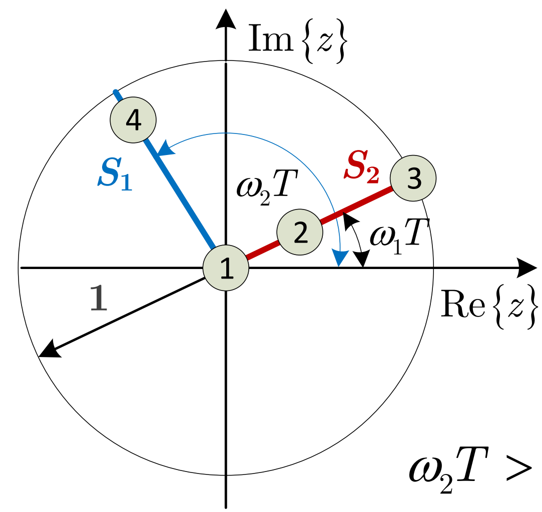
dok je kod diskretnih sistema ona iznosi:

$$T_\pi = \frac{2\pi}{\phi} \times T.$$



$$s = -\sigma + j\omega_1, \sigma \in [0, -\infty] \rightarrow z = e^{-\sigma T} e^{j\omega_1 T}$$

Sistemi čiji polovi leže na pravoj koja zaklapa određeni ugao sa realnim dijelom z-ose imaće istu periodu oscilacija



$$\omega_2 T > \omega_1 T$$

Sistemi čiji polovi leže na pravoj S_1 imaju kraću periodu oscilacija.

Prava istog preskoka

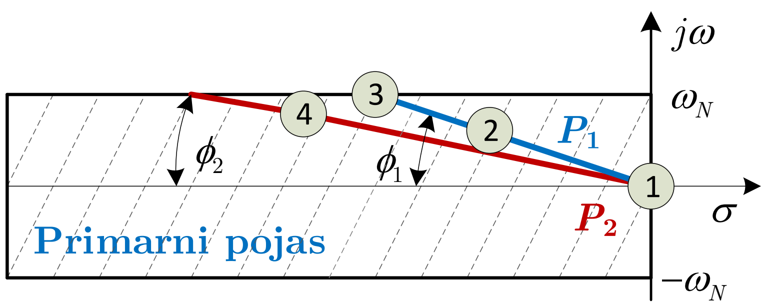
Kontinualni sistemi drugog reda čiji polovi leže na pravoj koja zaklapa određeni ugao sa negativnim dijelom realne ose imaju isti preskok. Kod kontinualnih sistema drugog reda preskok je jednak:

$$\Pi = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}},$$

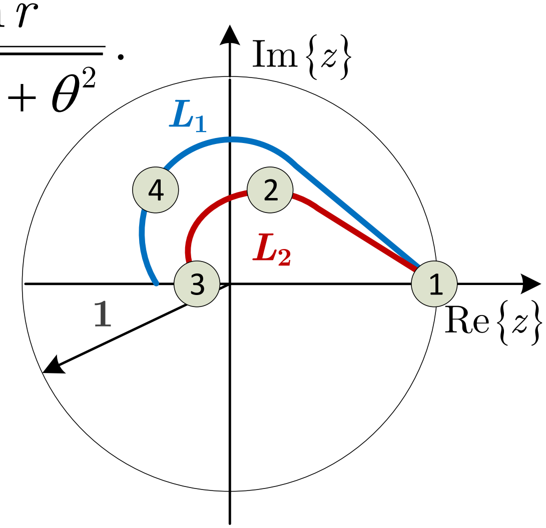
$$\boxed{\begin{gathered} s = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ z = e^{sT} = re^{j\theta} \end{gathered}}$$

dok kod diskretnih sistema on iznosi:

$$\Pi = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \zeta = \frac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r + \theta^2}}.$$



$$s = \omega_n e^{j\phi_1}, \omega_n \in [0, \omega_N / \sin\phi_1] \rightarrow z = e^{\omega_n T} e^{j2\phi_1}$$

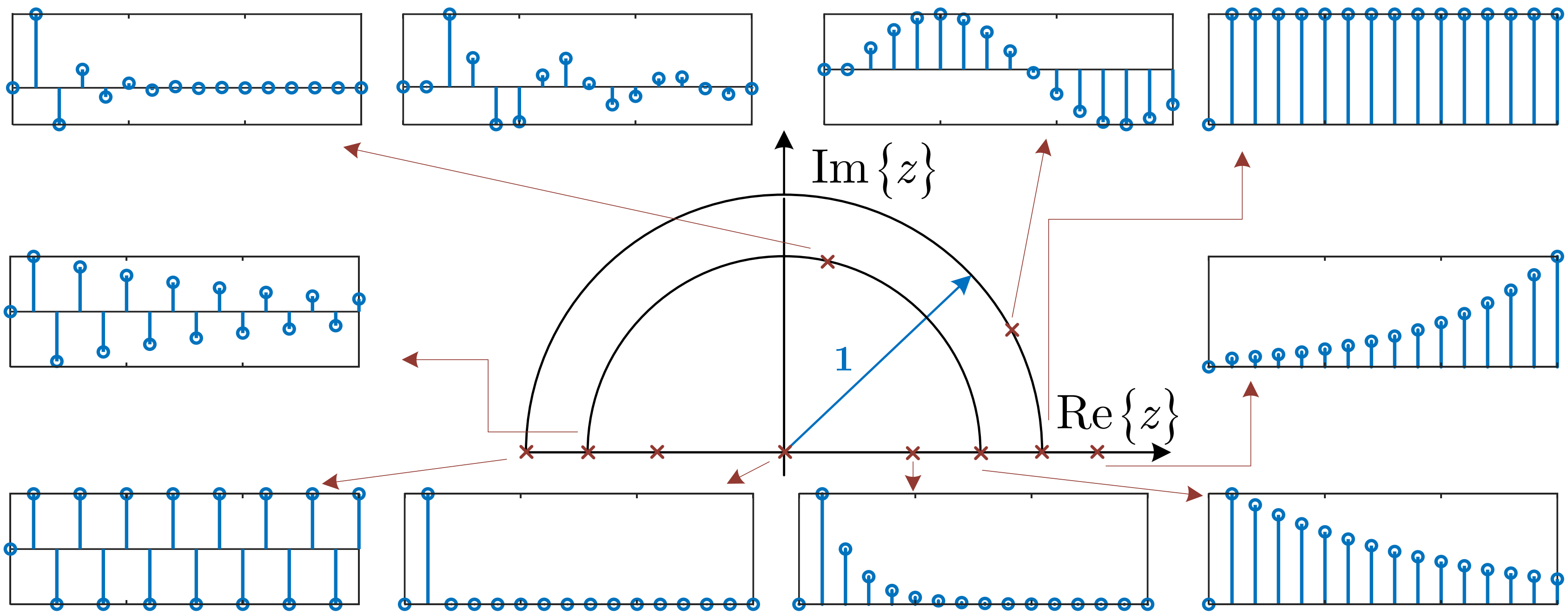


Sistemi čiji polovi leže na logaritamskoj spirali u z ravni imaće isti preskok

Sistemi čiji polovi leže na spirali L_1 imaju veći preskok.

Impulsni odziv u zavisnosti od položaja polova

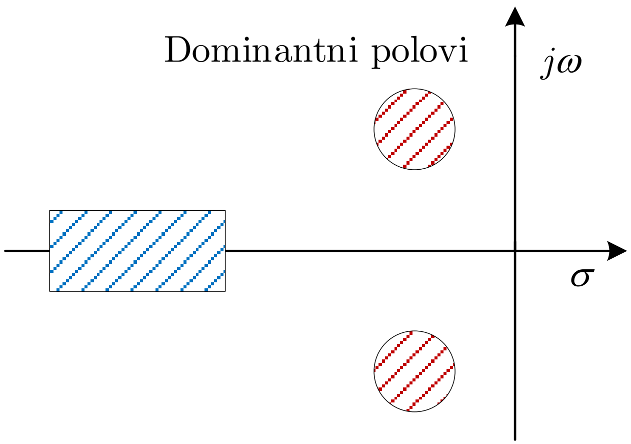
- Polovi unutar jediničnog kruga su stabilni
- Polovi na jediničnom krugu daju oscilatoran odziv (izuzetak z=1)
- Realni polovi na opsegu [0, 1] daju eksponencijalan odziv
- Veća frekvencija oscilacija za veće θ $\left(z = re^{j\theta}\right)$
- Manje prigušenje za veće θ i manje r.

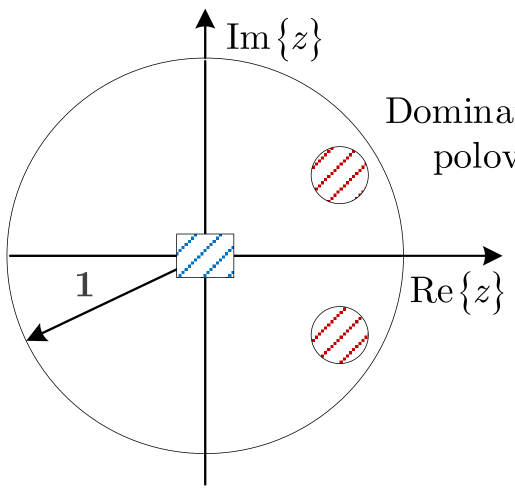


Dominantni polovi

Dominantni polovi u s-ravni su oni polovi koji su najbliži imaginarnoj osi. U z-ravni su to polovi koji imaju najmanji moduo, jer njihov prelazni proces najporije iščezava. Sa druge strane polovi koji leže blizu koordinantog početka imaju manji uticaj na odziv. Međutim, treba voditi računa da polovi koji leže u koordinatnom početku imaju zanemarljiv uticaj na faktor relativnog prugušenja i preskok, ali da oni unose čisto vremensko kašnjenje, pa se ne mogu potpuno zanemariti.

$$Y(z) \to y(n) \qquad \frac{Y(z)}{z} \to y(n-T)$$





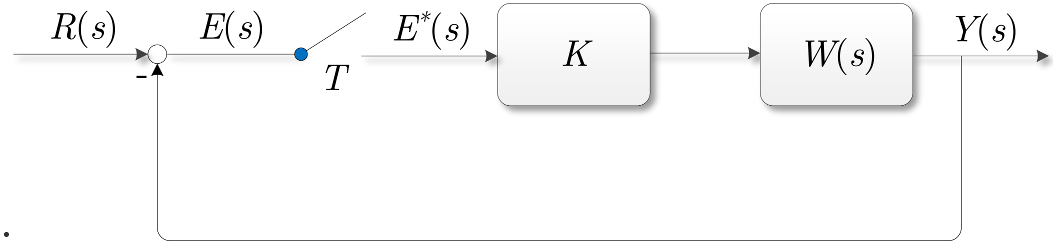
Primjer – performanse SAU-a

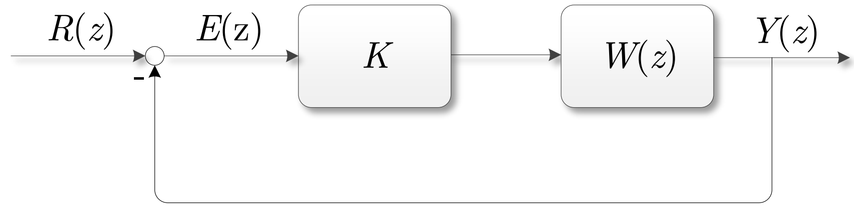
Odrediti vrijednost parametra K tako da greška sistema u praćenju rampa funkcije bude jedanka polovini minimalne moguće vrijednosti greške. Koliki su preskok i vrijeme smirenja sistema?

Funkcija prenosa procesa je:

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

dok je perioda odabiranja T=1s.





ZOH ekvivalent procesa je:

$$W(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.368z + 0.3679}.$$

U prethodnom primjeru smo već utvrdili da je sistem stabilan za K<2.4, što znači da treba usvojiti K=1.2, jer je:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to 1}(z-1)KW_d(z)} = 0.8333.$$

```
>> s=tf('s'), z=tf('z',1)
>> W=1/s/(s+1)
>> Wd=c2d(W,1,'zoh')
>> K=1.2
>> [A F]=bode(minreal((z-1)*K*Wd),0)
% minreal ? skracuje polove i nule
% z->1,  odnosno ->0
A =
    1.2000
```

Primjer – performanse SAU-a

Funkcija prenosa spregnutog sistema je:

$$G_d = \frac{KW_d(z)}{1+KW_d(z)} = \frac{0.4415z \ + \ 0.3171}{z^2 - 0.9264z + 0.685}.$$

Polovi spregnutog sistema su: $0.293 \pm 0.9185j$.

Preskok se može izračunati na dva načina – na osnovu formule u z-domenu, ili preslikavanjem polova u s domen (s=lnz/T) i korišćenjem standardne formule za preskok. Faktor relativnog prigušenja iznosi:

$$\zeta = \frac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r + \theta^2}} = 0.1902,$$

dok je preskok jednak:

$$\Pi = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 54.42\%.$$

Vrijeme smirenja aproksimativno iznosi:

$$T_s \approx -\frac{4}{\ln|r|} \times T = 21.14 \ s.$$

```
>> Gd=feedback(Wd*K,1)
>> step(Gd)
>> p=pole(Gd)
   0.4632 + 0.6859i
   0.4632 - 0.6859i
>> r=abs(p(1)),teta=angle(p(1))
>> zeta=-log(r)/sqrt(log(r)^2+teta^2)
>> exp((-zeta*pi)/sqrt(1-zeta^2))
```

Primjer – performanse SAU-a

Na slici desno su prikazani step odziv spregnutog sistema, kao i greška u praćenju rampa funkcije. Zbog astatizma step odziv dostiže željenu vrijednost.

Važno je imati u vidu da greška u praćenju rampa funkcije ne može proizvoljno da se smanjuje, jer sistem može postati nestabilan (za razliku od kontinualnog ekvivalenta).